Universidade Federal da Bahia
Campus Ondina – Salvador

2ª.PROVA (GABARITO) – MATB34

10 DE AGOSTO DE 2024

Questão 1 (valor: 2.5)**.** *Ache m para que $\vec{a} = (m-3, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -2, 2-m)$ e $\vec{c} = (-m, 24, 1)$ sejam coplanares.*

Solução possível. Lembremos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares se, e somente se, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] =$. Por sua vez,

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} m-3 & 0 & -m \\ 0 & -2 & 24 \\ -1 & 2-m & 1 \end{vmatrix} = 24m^2 - 12m + 150 = 6(2m-5)^2 \ .$$

Sendo assim, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares se, e somente se, $m = \frac{5}{2}$. □

Questão 2 (valor: 2.5)**.** *Determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$(x, y, z) \wedge (1, -1, -1) = (1, 1, 0) \quad e \quad (x, y, z) \bullet (2, 3, 4) = 9 \ .$$

Solução possível. Observamos que

$$(x, y, z) \wedge (1, -1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-y + z, x + z, -x - y) \ .$$

Sendo assim, $(x, y, z) \wedge (1, -1, -1) = (1, 1, 0)$ e $(x, y, z) \bullet (2, 3, 4) = 9$ se, e somente se,

$$\begin{cases} z - y = 1 \\ x + z = 1 \\ -x - y = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1, \ y = 1 \text{ e } z = 2 \ .$$

□

Questão 3 (valor: 2.5)**.** *Determine as medidas dos ângulos internos no triângulo de vértices $A = (3, 4, 4)$, $B = (2, -3, 4)$ e $C = (6, 0, 4)$. Calcule sua área.*

Solução possível. Observamos que $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -4, 0)$ e $\overrightarrow{BC} = (4, 3, 0)$. Logo $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{50}$ e $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = 5$. Dado que

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \ ,$$

então $\triangle ABC$ é triângulo retângulo com hipotenusa $\overline{AB}$. Logo a medido do ângulo $A\widehat{C}B$ é $\frac{\pi}{2}$. Visto que é isósceles, os outros dois ângulos medem $\frac{\pi}{4}$.

Vale também observar que $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = (-3, 4, 0) \bullet (-4, -3, 0) = 0$. Sendo assim, também poderíamos concluir que o ângulo $A\widehat{C}B$ é reto por esse argumento.

Como $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são os catetos, a área de $\triangle ABC$ é $\frac{25}{2}$. □

Questão 4 (valor: 2.5)**.** *Sabe-se que o plano π é perpendicular à reta $r\colon x-1=y=2z$ e que π passa pelo ponto $P=\left(1,\frac{1}{4},4\right)$. Determine equação geral para π. Determine onde π e r se encontram.*

Solução possível. Observamos que

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2\lambda \qquad (\lambda\in\mathbb{R}) \\ z = \lambda \end{cases}$$

é sistema de equações paramétricas para r. Sendo assim, $\vec{n}=(2,2,1)$ é vetor diretor para r.

Dado que $r\perp\pi$, então $\vec{n}\perp\pi$. Portanto, para algum $d\in\mathbb{R}$, $\pi\colon 2x+2y+z=d$. Visto que $P\in\pi$, $d=2+\frac{1}{2}+4=\frac{13}{2}$. Concluímos que $\pi\colon 4x+4y+2z=13$.

Agora procuremos o ponto na interseção de π com r. Para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$(1+2\lambda,2\lambda,\lambda)\in\pi \Leftrightarrow 4(1+2\lambda)+4(2\lambda)+2\lambda=13 \Leftrightarrow 18\lambda=9 \Leftrightarrow \lambda=\tfrac{1}{2}\ .$$

Concluímos que $r\cap\pi=\left\{\left(2,1,\frac{1}{2}\right)\right\}$. □